

# MODÉLISATION STATISTIQUE

Licence 3 MIASHS – Université de Bordeaux

– Chapitre II –

Notes de cours

Estimateurs et intervalles de confiance

## 1 Estimateurs

**Définition 1.1** *On appelle «  $n$ -échantillon » ou « échantillon aléatoire de taille  $n$  » une suite  $(X_n) = (X_1, \dots, X_n)$  de  $n$  variables indépendantes et identiquement distribuées. La suite est formée de copies aléatoires indépendantes et de même loi que la variable aléatoire parente  $X$ . Une réalisation  $(x_1, \dots, x_n)$  est obtenue après expérimentation.*

Supposons que la loi de  $X$  dépende d'un paramètre  $\theta \in \Theta$  inconnu et de dimension  $p \geq 1$ . Alors, la densité  $f$  de  $X$  (ou la fonction de probabilité dans le cas discret) dépend de  $\theta$ . On note souvent  $f_\theta(x)$  cette densité (ou encore  $\mathbb{P}_\theta(X = x)$  la fonction de probabilité dans le cas discret). L'ensemble  $\Theta$  dans lequel  $\theta$  prend ses valeurs est appelé « espace paramétrique », et la modélisation engendrée est paramétrique.

**Exemples.**

### 1.1 Définition et propriétés

**Définition 1.2** *Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon. On appelle « statistique » toute variable aléatoire  $T_n = g(X_1, \dots, X_n)$  fonction de  $(X_1, \dots, X_n)$ .*

**Définition 1.3** Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de loi  $f_\theta$ . On appelle « estimateur de  $\theta$  » toute statistique  $\hat{\theta}_n$  dont l'objectif est d'approcher le paramètre  $\theta$ .

**Exemples.**

La théorie de l'estimation a pour objectif la recherche de bons estimateurs par rapport à des critères mesurant l'écart entre la valeur vraie (mais inconnue) de  $\theta$  et sa valeur estimée  $\hat{\theta}_n$  à l'aide d'un  $n$ -échantillon.

### 1.1.1 Biais

Le biais entre  $\hat{\theta}_n$  et  $\theta$  est défini par

$$B(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \theta$$

et l'estimateur sera dit « non biaisé » (ou « sans biais ») lorsque  $B(\hat{\theta}_n, \theta) = 0$ . Il sera dit « asymptotiquement non biaisé » lorsque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\hat{\theta}_n, \theta) = 0.$$

En outre, l'erreur quadratique moyenne (ou risque  $L^2$ ) est définie par

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2].$$

**Proposition 1.1** Soit  $\hat{\theta}_n$  un estimateur de  $\theta$ . Alors, on a la décomposition biais-variance

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_n, \theta) = B^2(\hat{\theta}_n, \theta) + \mathbb{V}(\hat{\theta}_n).$$

**Démonstration.**

On veut montrer que

Le critère MSE est souvent utilisé pour évaluer la qualité d'un estimateur, car il fait intervenir un compromis entre le biais et la variance.

**1.1.2 Consistance**

L'estimateur  $\hat{\theta}_n$  sera dit « consistant » lorsque

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta.$$

La consistance est une caractéristique essentielle de la qualité d'un estimateur, celle qui est la plus directement en relation avec l'application statistique. En effet, il est immédiat de voir qu'un estimateur non consistant n'estime pas correctement  $\theta$ , et donc n'atteint pas les résultats escomptés. Nous disons généralement que  $\hat{\theta}_n$  est « faiblement » consistant dans le sens où la convergence a lieu en probabilité.

**Exemples.** On peut montrer que  $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$  et  $\hat{\sigma}_n^2 = s_n^2$  sont des estimateurs consistants de  $\mu$  et  $\sigma^2$ .

**Remarque.** Il faut ici noter qu'un estimateur peut être consistant tout en étant biaisé. Par exemple,

$$\mathbb{E}[s_n^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad \text{avec} \quad s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2$$

ce qui explique pourquoi l'on préfère souvent choisir la normalisation en  $(n-1)$  dans le calcul de  $s_n^2$ , pour le débiaiser tout en conservant ses propriétés de consistance.

En effet en notant

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2,$$

on peut montrer que  $S_n^2$  est bien un estimateur sans biais et consistant de  $\sigma^2$ .

Il existe d'autres propriétés permettant d'évaluer la qualité d'un estimateur, comme la consistance forte (lorsque la convergence a lieu presque sûrement), l'efficacité ou l'exhaustivité. Nous ne les verrons pas dans le cadre de ce cours.

## 1.2 Méthodes d'estimation

Nous supposons disposer d'un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  indépendant et identiquement distribué, dont la variable aléatoire parente  $X$  suit la loi  $\mathcal{L}_\theta$ , de densité (ou de fonction

de probabilité)  $f_\theta$ , où  $\theta \in \Theta$  est un paramètre que nous cherchons à estimer.

### 1.2.1 Méthode des moments

**Proposition 1.2** Soit  $\hat{\alpha}_n^{(m)}$  la famille d'estimateurs définis, pour  $m \geq 1$ , par

$$\hat{\alpha}_n^{(m)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^m.$$

Alors,  $\hat{\alpha}_n^{(m)}$  est un estimateur consistant de  $\mathbb{E}[X^m]$ .

**Démonstration.**

**Définition 1.4** On appelle « estimateur des moments de  $\theta$  » tout estimateur  $\hat{\theta}_n$  solution des équations de moments

$$\widehat{\mathbb{E}}[X^m] = \hat{\alpha}_n^{(m)}$$

pour tout  $1 \leq m \leq p$ , où  $p$  est la dimension du paramètre.

Ainsi, pour une estimation scalaire telle que la moyenne d'un échantillon exponentiel, une seule équation est suffisante tandis que pour l'estimateur dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  de la moyenne et de la variance d'un échantillon gaussien, deux équations seront nécessaires.

**Exemple.** Soit  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$ . La loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire. Sa densité est  $f_\lambda(t) = 0$  si  $t < 0$  et  $f_\lambda(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$  sinon. Ici, il y a un seul paramètre  $\lambda$  donc une seule équation des moments suffit.

La solution n'est pas unique, on aurait par exemple pu travailler avec  $m = 2$ . Alors, l'équation des moments s'écrit :

### 1.2.2 Méthode du maximum de vraisemblance

Lorsque l'on se donne une observation  $(x_1, \dots, x_n)$  d'un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$ , il est possible de mesurer sa vraisemblance selon la loi  $\mathcal{L}_\theta$  : il s'agit de la loi jointe de l'échantillon, de densité jointe (ou de fonction de probabilité jointe dans le cas discret)  $\ell(x_1, \dots, x_n; \theta)$ , appelée fonction de vraisemblance. Nous cherchons alors la valeur de  $\theta$  qui maximise  $\ell(x_1, \dots, x_n; \theta)$ , celle-ci représente la valeur avec laquelle l'échantillon a le plus de chance d'avoir été généré sous l'hypothèse que la densité (ou la fonction de probabilité) de  $X$  est bien  $f_\theta$ .

**Définition 1.5** On appelle « estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$  » l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  donné par

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in \Theta} \ell(x_1, \dots, x_n; \theta).$$

Notons que, puisque le  $n$ -échantillon est indépendant, la fonction de vraisemblance se réduit à la forme simplifiée

$$\ell(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{k=1}^n f(x_k; \theta)$$

où  $f(x; \theta) = f_\theta(x)$  si  $X$  est une variable aléatoire continue et  $f(x; \theta) = \mathbb{P}_\theta(X = x)$  si  $X$  est une variable aléatoire discrète. Il sera donc plus facile, en pratique, de maximiser la log-vraisemblance  $\ell\ell(x_1, \dots, x_n; \theta) = \ln \ell(x_1, \dots, x_n; \theta)$ .

**Exemple.** Reprenons l'exemple précédent avec  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$  et  $\lambda > 0$ . Pour tout  $x \geq 0$ ,

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

On retrouve l'estimateur de  $\lambda$  obtenu par la méthode des moments. Ce point est bien un maximum de  $\ell\ell_\lambda$  puisque

$$\frac{\partial^2 \ell\ell_\lambda}{\partial \lambda^2}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{n}{\lambda^2} \leq 0.$$

## 2 Intervalles de confiance

Lorsque l'on a produit un estimateur et montré qu'il était consistant, l'étape naturelle suivante consiste à établir un « intervalle de confiance » qui encadre la valeur inconnue  $\theta$  avec un risque d'erreur  $0 \leq \alpha \leq 1$  que l'on se fixe, à partir de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$ . Cela nous permet donc d'être beaucoup plus précis quant à la qualité de l'estimateur. L'intervalle de confiance est issu de la distribution de l'estimateur, et l'on distinguera alors deux cas de figure :

- La forme de la loi parente est connue (normale, de Poisson, etc.) et l'estimateur a une distribution identifiable, l'intervalle de confiance est exact.
- La loi parente est inconnue et l'estimateur a une distribution asymptotique découlant du théorème central limite, l'intervalle de confiance est asymptotique.

### 2.1 Intervalles de confiance exacts

Nous nous limiterons ici au cas gaussien, mais les résultats sont extensibles au cas général. Soit  $\hat{\theta}_n$  un estimateur associé au paramètre  $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  d'un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  gaussien de densité parente  $f_\theta$ .

**Définition 2.1** On appelle « intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  » l'intervalle aléatoire  $[B_{\text{inf}}(\hat{\theta}_n), B_{\text{sup}}(\hat{\theta}_n)]$  tel que

$$\mathbb{P}(B_{\text{inf}}(\hat{\theta}_n) \leq \theta \leq B_{\text{sup}}(\hat{\theta}_n)) = 1 - \alpha.$$

#### 2.1.1 Quelques rappels sur les lois usuelles

Soit une suite de variables aléatoires  $(X_n)$  indépendantes et identiquement distribuées, de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Soit  $(Y_n)$  la suite aléatoire  $(X_n)$  centrée et réduite,

$$Y_k = \frac{X_k - \mu}{\sigma}$$

pour tout  $1 \leq k \leq n$ . Bien entendu, les variables  $Y_1, \dots, Y_n$  sont également indépendantes et identiquement distribuées, de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Nous allons caractériser les lois du khi-deux, de Student et de Fisher à partir de  $(Y_n)$ , dans le cadre simplifié qui nous intéressera par la suite. Tout d'abord,

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2 \sim \chi_n^2$$

où  $\chi_n^2$  est distribuée selon la loi du khi-deux à  $n$  degrés de liberté.

Par ailleurs, soient  $Y$  une variable aléatoire de loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $S$  une variable aléatoire indépendante de  $Y$ , de loi du khi-deux à  $n$  degrés de liberté. Alors,

$$\frac{Y}{\sqrt{S/n}} \sim t_n$$

où  $t_n$  est distribuée selon la loi de Student à  $n$  degrés de liberté.

Enfin, soient  $S_1$  et  $S_2$  deux variables aléatoires indépendantes et distribuées selon la loi du khi-deux à  $n_1$  et  $n_2$  degrés de liberté, respectivement. Alors

$$\frac{S_1/n_1}{S_2/n_2} \sim F_{n_1, n_2}$$

où  $F_{n_1, n_2}$  est distribuée selon la loi de Fisher à  $(n_1, n_2)$  degrés de liberté.

### 2.1.2 Estimateurs de $\mu$ et $\sigma^2$ dans un échantillon gaussien

On rappelle que l'on dispose d'un  $n$ -échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  gaussien et indépendant, de paramètre  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ . Alors, les estimateurs du maximum de vraisemblance débiaisés  $\bar{X}_n$  de  $\mu$  et  $S_n^2$  de  $\sigma^2$  sont donnés par

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2.$$

Par la loi faible des grands nombres, nous avons immédiatement

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu \quad \text{et} \quad S_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma^2$$

ce qui montre que ces estimateurs sont consistants. Par ailleurs,

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$$

et, d'après le théorème de Fisher (lui-même en partie issu du théorème de Cochran : voir le cours de L2),

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

et l'on a de plus l'indépendance entre  $\bar{X}_n$  et  $S_n^2$ .

### 2.1.3 Exemples d'intervalles de confiance associés à $\mu$ et $\sigma^2$

Par l'intermédiaire de la distribution de  $\bar{X}_n$ , on a

$$\mathbb{P}\left(u_{\alpha/2} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

où  $u_\alpha$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ , avec  $u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$  puisque la loi gaussienne est symétrique. Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

ce qui caractérise l'intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$  de l'espérance  $\mu$  d'un échantillon gaussien indépendant, dont la variance  $\sigma^2$  est connue.

Si maintenant  $\sigma^2$  est inconnue, alors l'intervalle ci-dessus n'a plus aucun intérêt pratique puisque les bornes dépendent d'un paramètre dont on ne connaît pas la valeur. Nous allons le remplacer par son estimateur  $S_n^2$  consistant, mais cela modifie bien sûr les quantiles à considérer. En particulier,

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} = \frac{Z_n}{\sqrt{T_n/(n-1)}}$$

avec

$$Z_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \sim \chi_{n-1}^2.$$



On en déduit que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}$$

par définition de la loi de Student, et grâce à l'indépendance de  $\bar{X}_n$  et de  $S_n^2$ . L'intervalle de confiance devient alors

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

où  $t_{n-1, \alpha}$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi de Student à  $n - 1$  degrés de liberté, pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ , avec  $t_{n-1, \alpha/2} = -t_{n-1, 1-\alpha/2}$  puisque la loi de Student est symétrique.

Si maintenant l'on s'intéresse à l'intervalle de confiance associé à  $\sigma^2$ , il vient immédiatement

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{z_{n-1, 1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n^2}{z_{n-1, \alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$$

où  $z_{n-1, \alpha}$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi du khi-deux à  $n - 1$  degrés de liberté, pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Nous avons considéré ici que  $\mu$  était inconnue, et devait donc être estimée par  $\bar{X}_n$ .

Si maintenant  $\mu$  est connue (par exemple pour un échantillon que l'on suppose centré), alors l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\sigma^2$  prend la forme simplifiée

$$\tilde{s}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 \quad \text{et vérifie} \quad \frac{n\tilde{s}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2,$$

par définition de la loi du khi-deux. Dès lors,

$$\mathbb{P}\left(\frac{n\tilde{s}_n^2}{z_{n, 1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{n\tilde{s}_n^2}{z_{n, \alpha/2}}\right) = 1 - \alpha$$

où  $z_{n, \alpha}$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi du khi-deux à  $n$  degrés de liberté, pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Si enfin l'on considère deux échantillons gaussiens indépendants de tailles respectives  $n$  et  $q$  et de paramètres  $(\mu_1, \sigma_1^2)$  et  $(\mu_2, \sigma_2^2)$  inconnus, dont on s'intéresse au comportement relatif des variances, alors on a immédiatement

$$\frac{n-1}{\sigma_1^2} S_{n,1}^2 \sim \chi_{n-1}^2 \quad \text{et} \quad \frac{q-1}{\sigma_2^2} S_{q,2}^2 \sim \chi_{q-1}^2$$

où les estimateurs  $S_{n,1}^2$  et  $S_{q,2}^2$  sont respectivement construits sur les échantillons 1 et 2, et donc

$$\frac{\sigma_2^2 S_{n,1}^2}{\sigma_1^2 S_{q,2}^2} \sim F_{n-1, q-1}$$

par définition de la loi de Fisher. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{q,2}^2}{S_{n,1}^2} f_{n-1, q-1, \alpha/2} \leq \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{S_{q,2}^2}{S_{n,1}^2} f_{n-1, q-1, 1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

où  $f_{n-1, q-1, \alpha}$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi de Fisher à  $(n - 1, q - 1)$  degrés de liberté, pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

**Exemple.** Soit  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . On observe un  $n$ -échantillon de taille  $n = 100$  tel que

$$\bar{X}_{100} \approx 2.044 \quad \text{et} \quad S_{100}^2 \approx 1.055.$$

Pour  $\alpha = 0.05$ ,  $t_{99, 0.975} \approx 1.984$ ,  $z_{99, 0.025} \approx 73.36$  et  $z_{99, 0.975} \approx 128.42$ . Sans la connaissance de  $\mu$  ni de  $\sigma^2$ , on a :

ce qui est cohérent avec les données de simulation, puisque l'on avait utilisé  $\mu = 2$  et  $\sigma^2 = 1$ .

On peut vérifier en simulation dans R que si l'on génère  $N = 1000$  échantillons de taille  $n = 100$  iid selon une loi  $\mathcal{N}(2, 1)$ , on construit  $N = 1000$  réalisations de l'intervalle de confiance de  $\mu$  par exemple et on compte le nombre de fois où ces intervalles contiennent la vraie valeur 2 du paramètre. On devrait trouver que 2 appartient à l'intervalle environ 95% du temps.

## 2.2 Intervalles de confiance asymptotiques

Lorsque l'échantillon est de grande taille, que les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées mais non nécessairement gaussiennes, alors (et paradoxalement), les intervalles de confiance sont bien plus faciles à obtenir.

**Définition 2.2** On appelle « intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  » l'intervalle aléatoire  $[B_{\text{inf}}(\hat{\theta}_n), B_{\text{sup}}(\hat{\theta}_n)]$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_{\text{inf}}(\hat{\theta}_n) \leq \theta \leq B_{\text{sup}}(\hat{\theta}_n)) = 1 - \alpha.$$

Par le théorème central limite, nous savons que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

La normalité asymptotique n'est en outre pas impactée par l'introduction de l'estimateur consistant de  $\sigma^2$ . En effet,

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{s_n} = \underbrace{\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}}_{\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)} \underbrace{\frac{\sigma}{s_n}}_{\xrightarrow{\mathbb{P}} 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

par le théorème de Slutsky. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \bar{X}_n - \frac{s_n}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X}_n + \frac{s_n}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

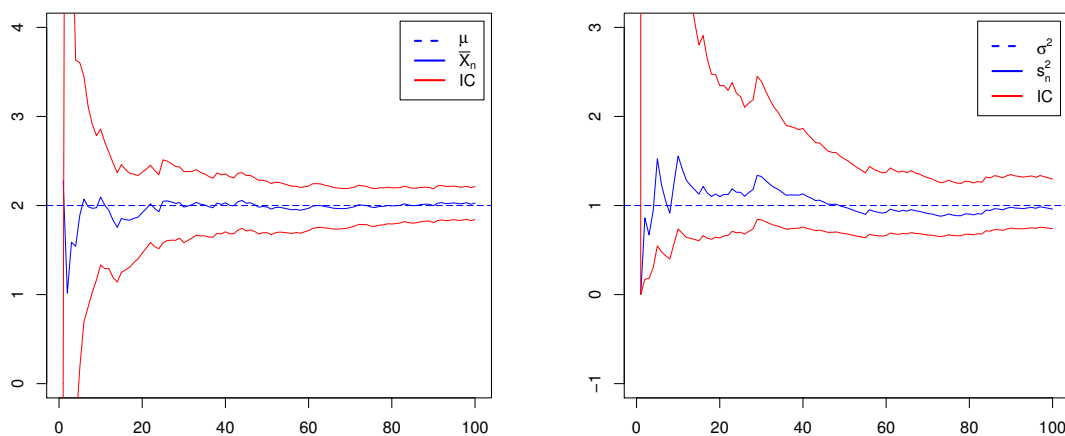
où  $u_\alpha$  est le quantile d'ordre  $\alpha$  de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Par comparaison avec l'intervalle de confiance associé à l'échantillon gaussien, nous voyons que celui-ci est certes asymptotique (puisque la limite en  $n$  intervient), mais qu'il dépend uniquement des quantiles de la loi normale et non plus de ceux de la loi de Student. Nous pouvons en outre remarquer que si  $Y_n$  suit la loi de Student à  $n$  degrés de liberté, alors

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

où  $Z$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Il s'agit rigoureusement de la même démarche lorsque l'on passe de l'intervalle de confiance exact basé sur la loi de Student à l'intervalle de confiance asymptotique basé sur la loi normale. La consistance de l'estimateur de  $\sigma^2$  est donc une condition nécessaire pour ne pas biaiser l'intervalle de confiance, pour les grands échantillons et par l'intermédiaire du théorème de Slutsky. Au prix de quelques calculs supplémentaires, il est également possible d'obtenir un intervalle de confiance asymptotique pour  $\sigma^2$  (et d'une manière générale pour tout paramètre dont un estimateur consistant est susceptible de satisfaire un théorème central limite).

## 2.3 Exemples en simulation

Pour conclure, nous avons simulé un échantillon gaussien de taille  $n = 100$ , indépendant, de paramètres  $\mu = 2$  et  $\sigma^2 = 1$ . Nous avons utilisé les estimateurs  $\bar{X}_n$  et  $s_n^2$  en considérant que  $\mu$  et  $\sigma^2$  étaient inconnus. Nous avons représenté sur la figure ci-dessous le comportement de l'estimateur  $\bar{X}_n$  ainsi que l'intervalle de confiance exact associé à  $\mu$  sur la gauche, puis le comportement de l'estimateur  $s_n^2$  ainsi que l'intervalle de confiance exact associé à  $\sigma^2$  sur la droite, pour  $\alpha = 0.05$ . Les graphes illustrent clairement la convergence des estimateurs ainsi que le confinement de la valeur limite dans la région de confiance.



Nous avons également simulé un échantillon indépendant mais non gaussien, de grande taille ( $n = 1000$ ), uniforme sur  $[-2, 2]$  sur la gauche (donc d'espérance  $\mu = 0$ ) et de loi de Bernoulli de paramètre  $p = 0.3$  sur la droite (donc d'espérance  $\mu = 0.3$ ). Nous avons de nouveau utilisé l'estimateur  $\bar{X}_n$  puis nous avons représenté son comportement ainsi que l'intervalle de confiance asymptotique associé à  $\mu$ , pour  $\alpha = 0.05$ . Nous voyons clairement que, plus  $n$  grandit, plus l'estimateur ainsi que l'intervalle de confiance se concentrent autour d'une limite qui est la vraie valeur du paramètre estimé, et ce bien que l'échantillon ne soit pas gaussien et l'intervalle de confiance non exact.

