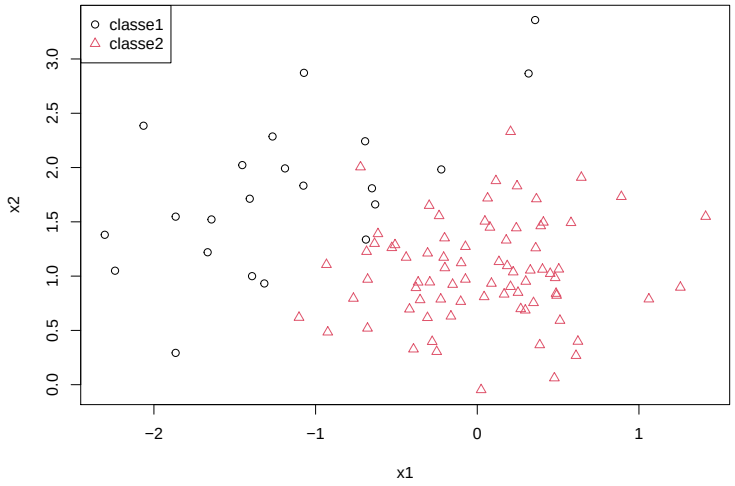
Apprentissage supervisé

TP7 : régression logistique

Exercice 1. On utilise dans cet exercice les données synth_train.txt et synth_test.txt.



1. En régression logistique la variable de sortie Y prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$. Recoder la variable de sortie Y pour avoir : ¨0=classe 1¨ et ¨1=classe 2.
2. On fait l'hypothèse paramétrique suivante :

$$\mathbb{P}(Y = 1|X = (x_1, x_2)) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)},$$

   Estimer sur les données d'apprentissage les paramètres inconnu $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ à l'aide la fonction `glm`.
3. Interpréter les coefficients β_1 et β_2 ainsi estimés.
4. Prédire la classe de la nouvelle observation $x = (0, 1)$ calculant le score logit (score linéaire)

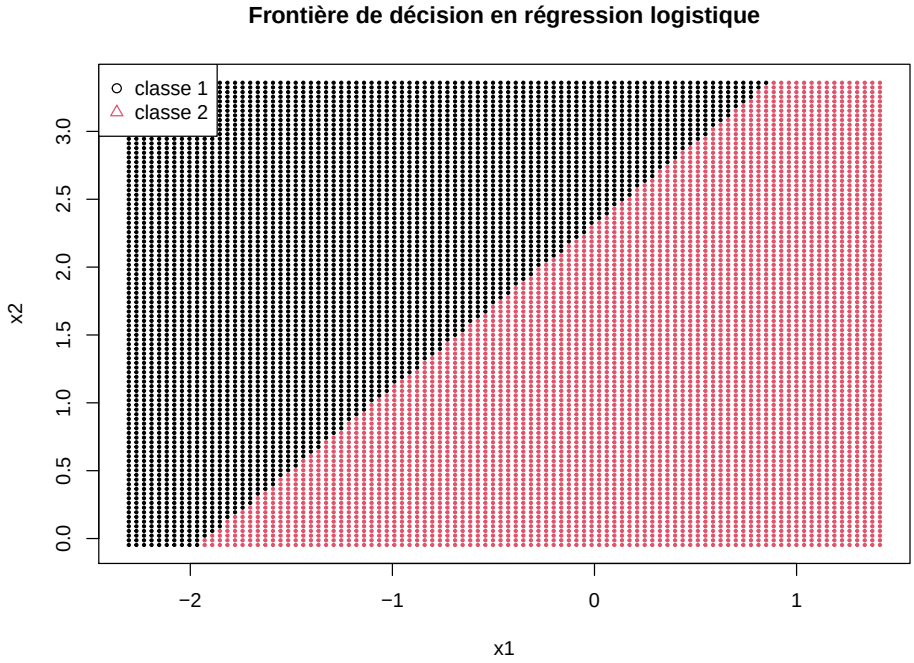
$$\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

   Vérifier que x est bien affecté à la classe 2.
5. Prédire la classe de la nouvelle observation $x = (-1, 2)$ en calculant cette fois le score

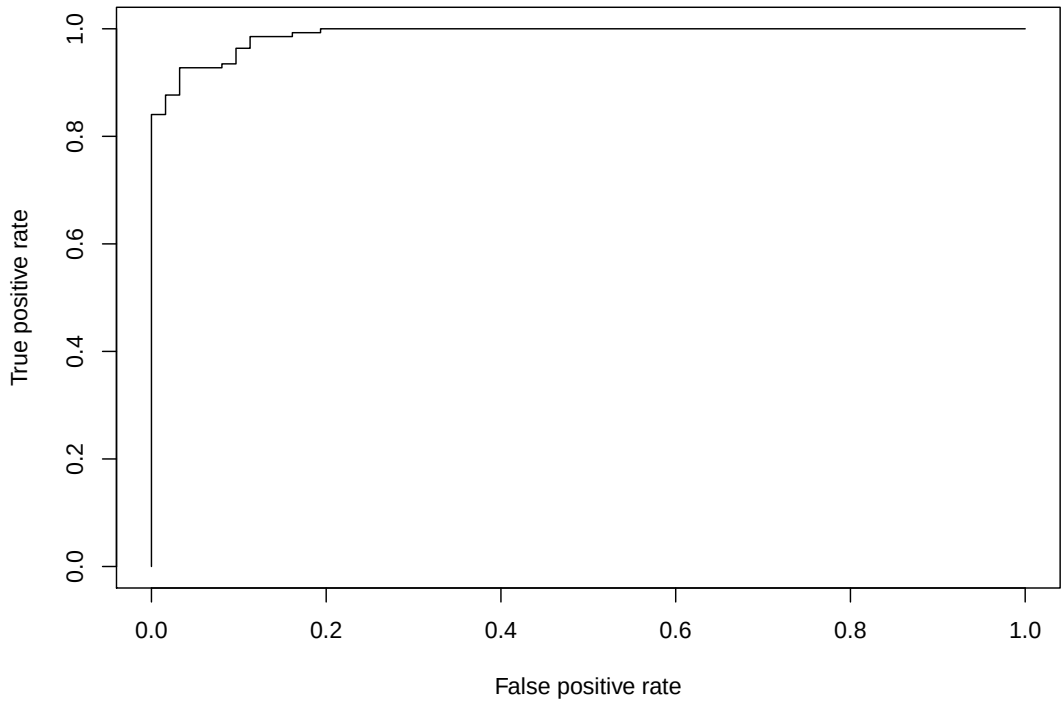
$$p = \mathbb{P}[Y = 1|X = x]$$

   Vérifier que x est bien affecté à la classe 1.
6. Utiliser la méthode `predict` de la classe `glm` pour retouver les scores obtenus aux deux questions précédentes. Cette fonction permet-elle de prédire directement les classes ?
7. Prédire les données d'apprentissage et calculer le taux d'erreur d'apprentissage.

8. Représenter la frontière de décision de la méthode de régression logistique à partir de la grille de points du TP1.



9. Charger le jeu de données test et calculer le taux d'erreur test.
10. Tracer la courbe ROC et calculer le critère AUC des données test.



Exercice 2. On reprend le jeu de données où 1260 exploitations agricoles saines ou défaillantes sont décrites par $p = 22$ critères économiques et financiers.

```
load("../data/Desbois_complet.rda")
```

On considère le modèle de régression logistique suivant

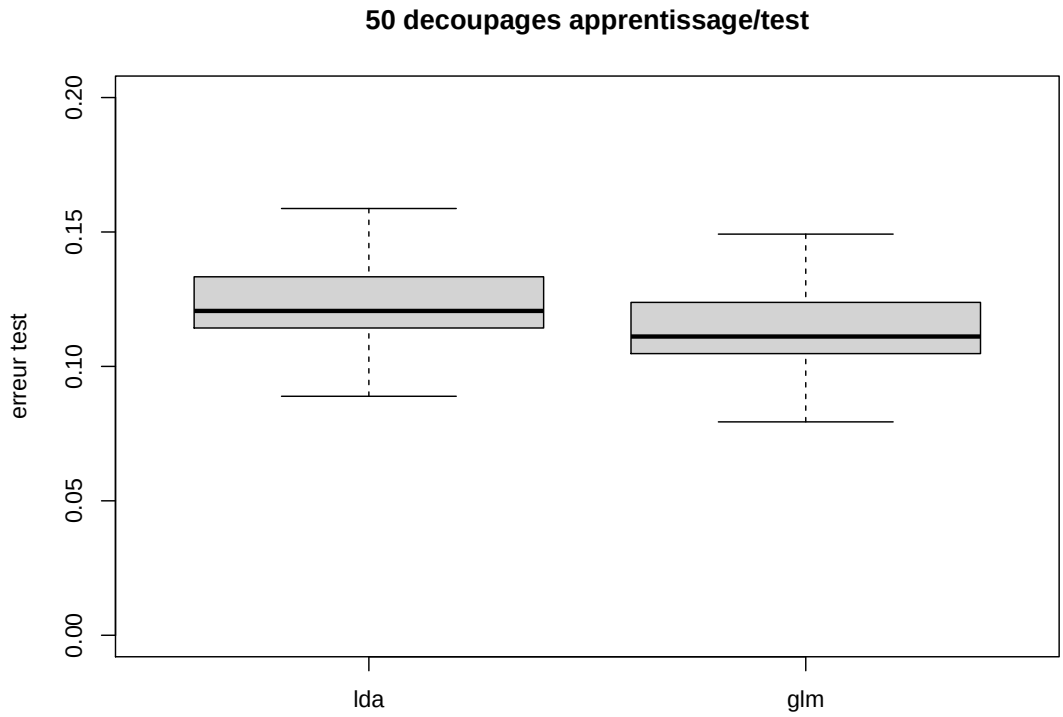
$$\mathbb{P}(Y = 1|X = x) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta^T x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta^T x)} \tag{1}$$

où

- la variable à expliquer Y est la variable difficulté de paiement (0=sain et 1=défaillant),
- les p variables explicatives $X = (X^1, \ldots, X^p)$ sont les $p = 22$ ratios financier,
- $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^T$ est le vecteur des coefficients associés à ces p variables explicatives.

1. Estimer à l'aide la fonction `glm` les coefficients $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$ de ce modèle de régression logistique. Quelles sont les variables qui expliquent significativement la défaillance d'une exploitation agricole ?

2. Comparer le taux d'erreur de la régression logistique et le taux d'erreur de l'analyse discriminante linéaire à partir de $B = 50$ découpages aléatoires des données (945 observations d'apprentissage et 315 observations test à chaque découpage).



Exercice 3. On continue avec les données de l'exercice 2 mais on estime cette fois les paramètres du modèle (1) avec la fonction `glmnet` du package `glmnet` [1]. La fonction `glmnet` estime les coefficient de la régression logistique par maximisation de la log-vraissemblance pénalisée :

$$\max_{(\beta_0,\beta)\in\mathbb{R}^{p+1}} \ell(\beta_0,\beta) - \lambda\left((1-\alpha)\frac{\|\beta\|_2^2}{2} + \alpha\|\beta\|_1\right) \tag{2}$$

où

— $\ell(\beta_0,\beta)$ est la log-vraissemblance qui s'écrit en régression logistique :

$$\ell(\beta_0,\beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i(\beta_0 + x_i^T\beta) - \log(1+\exp(\beta_0 + x_i^T\beta)) \tag{3}$$

— $(1-\alpha)\frac{\|\beta\|_2^2}{2} + \alpha\|\beta\|_1$ est la pénalité **elastic-net**.

La pénalité elastic-net est un mélange des pénalités ridge et lasso controlé par le paramètre $\alpha \in [0,1]$:

— Si $\alpha = 1$, la pénalité elastic-net est une pénalité ridge ($\|\beta\|_2^2$). Cette pénalité permet d'éviter les trop grandes valeurs de $\hat{\beta}$ et de contrôler la variance de cet estimateur (au risque d'augmenter son biais). Une pénalité ridge ne permet pas en revanche de sélectionner des variables.

— Si $\alpha = 0$, la pénalité elastic-net est une pénalité lasso ($\|\beta\|_1$). Cette pénalité permet de mettre à 0 certains coefficients de $\hat{\beta}$ et donc de sélectionner des variables.

Le paramètre λ ($\lambda \geq 0$) est un paramètre de régularisation à fixer et qui permet de contrôler l'impact de la pénalité :

— Si $\lambda = 0$, les coefficients du modèle (1) sont estimés par maximum de vraissemblance et la fonction `glmnet` effectue une régression logistique classique.

— Plus λ augmente, plus on pénalise la vraissemblance et si :

  — $\alpha = 0$, λ est le paramètre de régularisation de la régression logistique ridge,
  — $\alpha = 1$, λ est le paramètre de régularisation de la régression logistique lasso.

1. Démontrer (3).
2. Estimer à l'aide la fonction `glmnet` les coefficients $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$ du modèle de régression logistique (1) pour retrouver les résultats de la fonction `glm` à l'exercice 2. Ces résultats sont-ils parfaitement identiques ? Pourquoi ?

Exercice 4. On continue avec les données sur les exploitations agricoles.

```
load("../data/Desbois_complet.rda")
X <- data[,-1]
Y <- data$DIFF
```

L'objectif cette fois est d'estimer les coefficient du modèle (1) par **`régression logistique ridge`** ce qui nécessite de fixer la valeur d'un paramètre de régularisation λ. On utilise pour cela la fonction `glmnet`.

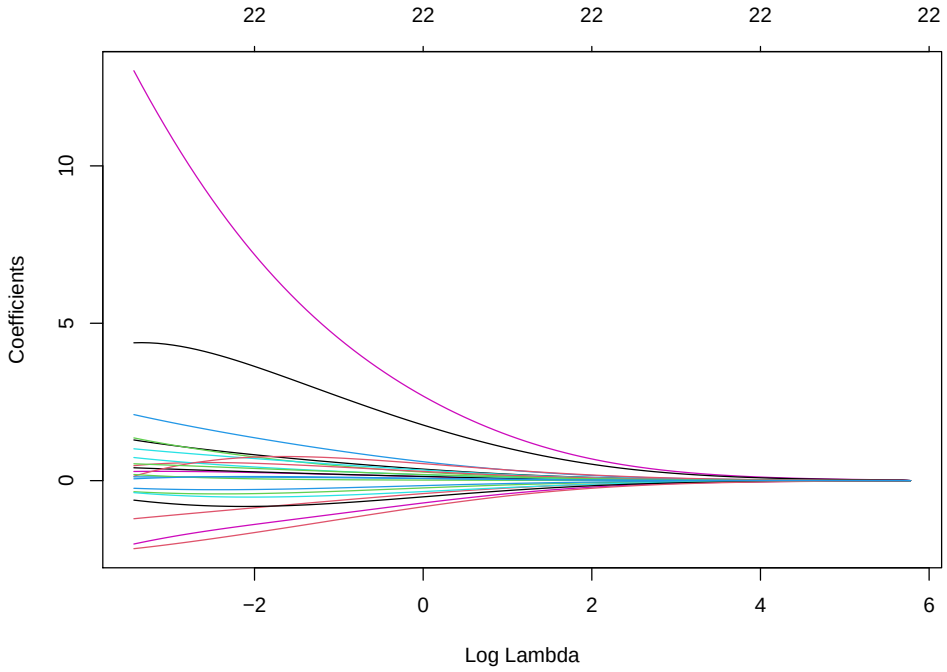
1. https ://web.stanford.edu/∼hastie/glmnet/glmnet_alpha.html

1. Que fait le code ci-dessous ?

```
g <- glmnet(as.matrix(X), as.factor(Y), family="binomial",
            alpha=0,
            standardize = TRUE)
```

2. Expliquer les 3 axes du graphique ci-dessous.

```
plot(g, xvar = "lambda")
```



3. Comment est définie la grille de valeurs de λ ?

```
g$lambda
log(g$lambda)
```

Vérifier la relation en la plus grande et la plus petite valeur de cette grille.

4. Que fait le code ci-dessous ?

```
g$beta[,c(1, 50, 100)]
```

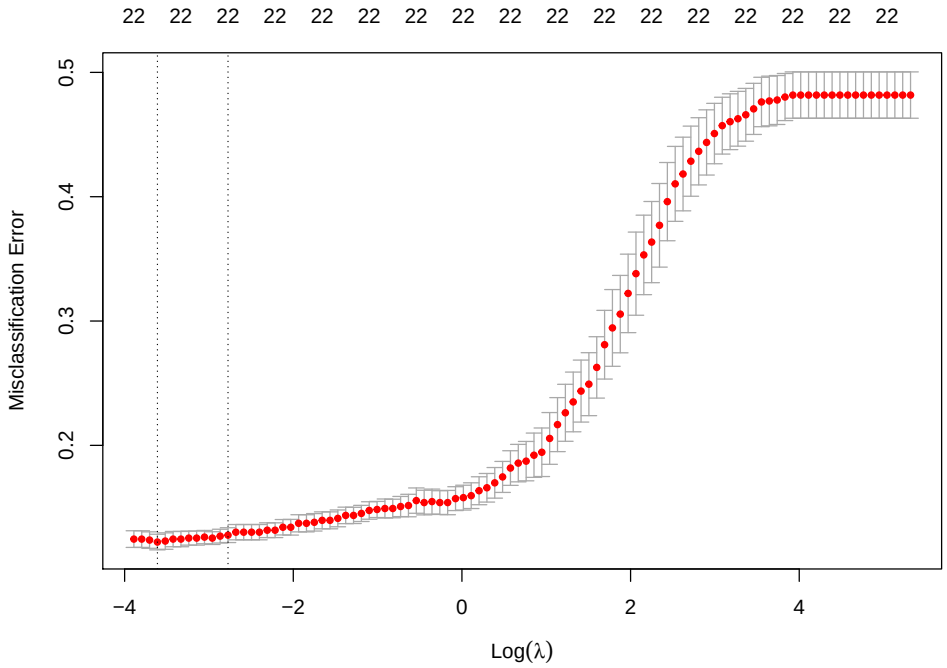
5. Utiliser la méthode `coef` pour comparer les coefficients obtenus avec une grande valeur de λ ($\lambda = 200$) et une petite valeur de λ ($\lambda = 0.02$). Vérifier que plus la valeur de λ est grande plus la norme $\|\beta\|_2$ est petite.

6. On veut maintenant fixer la valeur du paramètre de régularisation λ par validation croisée. Pour cela on utilise la fonction `glmnet.cv`. Que fait le code ci-dessous ? Quel est par défaut le type de validation croisée implémenté ?

```
g <- cv.glmnet(as.matrix(X), as.factor(Y), family="binomial",
               alpha=0,
               standardize=FALSE,
               type.measure="class")
```

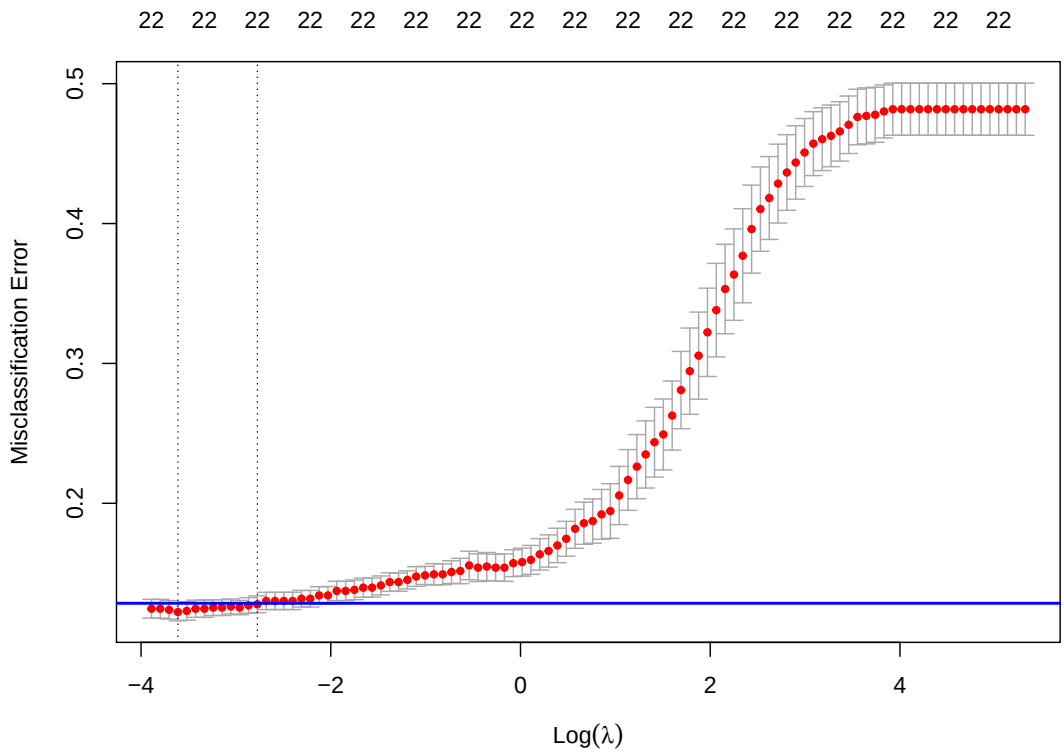
7. Expliquer les 3 axes du graphique ci-dessous. A quoi correspondent les points rouges et les intervalles ?

```
plot(g)
```

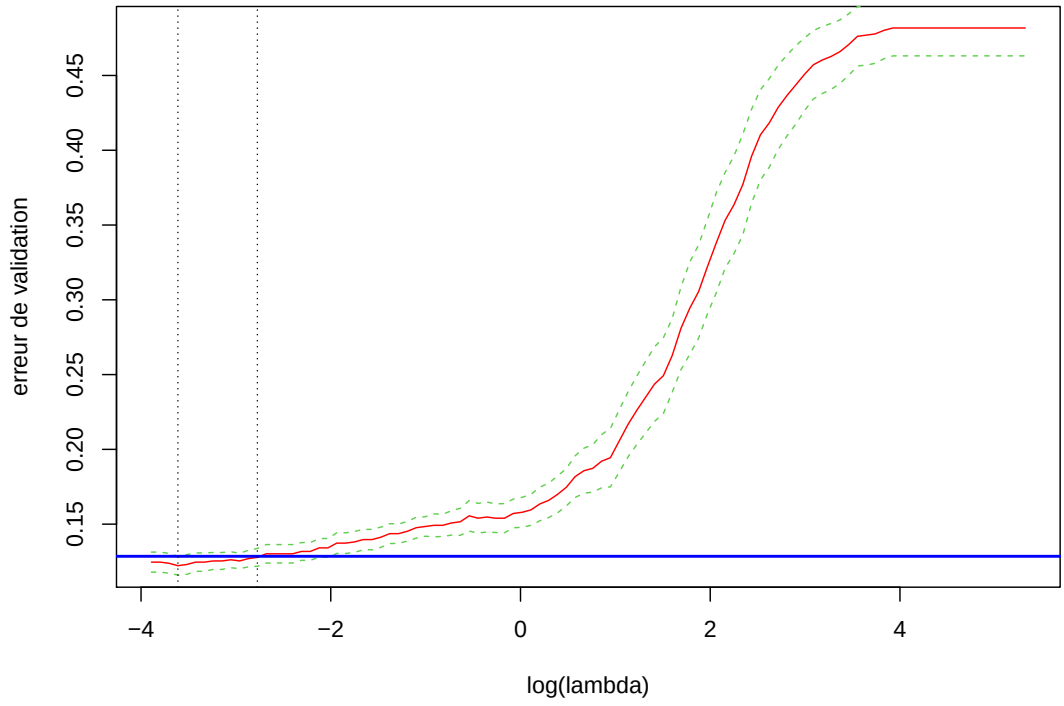


8. La première ligne verticales du graphique correspond à une valeur particulière de λ appellée `lambda.min` (dans les sorties de la fonction `glmnet.cv`) et la seconde correspond à une valeur particulière appellée `lambda.1se`. Ces deux valeurs de λ sont définie comme suit :
   — `lambda.min` minimise l'erreur (moyenne) de validation croisée.
   — `lambda.1se` est la plus grande valeur de λ dont l'erreur (moyenne) de validation croisée est inférieure à l'erreur optimale (de "lambda.min") plus une fois son écart-type.

   Quelles sont les valeurs de `lambda.min` et `lambda.1se` pour les données sur les exploitations agricoles ? Vérifier qu'elles correspondent bien aux deux lignes verticales du graphique.
9. Retrouver `lambda.min` à partir de la sortie `cvm` (cross validation mean).
10. Calculer le seuil permettant de trouver `lambda.1se` à partir de la sortie `cvsd` (cross validation standard deviation) et ajouter au graphique une ligne horizontale bleu en fonction de ce seuil.



11. Construire ensuite le même graphique sans utiliser la méthode `plot`.



12. Laquelle des deux valeurs de λ régularise plus ?

13. On choisit `lambda.min` comme paramètre de régularisation. Utiliser la méthode `predict` pour prédire la classe de la première exploitation agricole et estimer sa probabilité à posteriori d'être défaillante.

Exercice 5. On continue avec les données sur les exploitations agricoles.

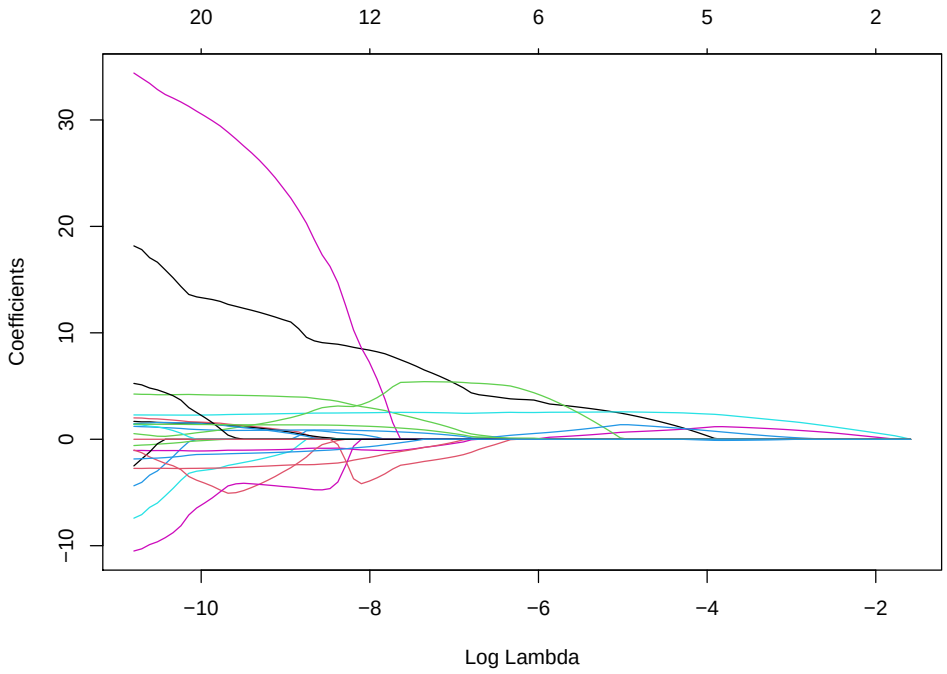
```
load("../data/Desbois_complet.rda")
X <- data[,-1]
Y <- data$DIFF
```

L'objectif est cette fois d'estimer les coefficient du modèle (1) par **régression logistique lasso** ce qui nécessite (comme en regression ridge) de fixer la valeur d'un paramètre de régularisation λ. On utilise là encore fonction `glmnet`.

1. Que fait le code ci-dessous ?

```
g <- glmnet(as.matrix(X), as.factor(Y), family="binomial",
            alpha=1,
            standardize = FALSE)
```

2. Expliquer les 3 axes du graphique ci-dessous.



3. Que fait le code ci-dessous ?

```
g$beta[,c(1, 50, 100)]
```

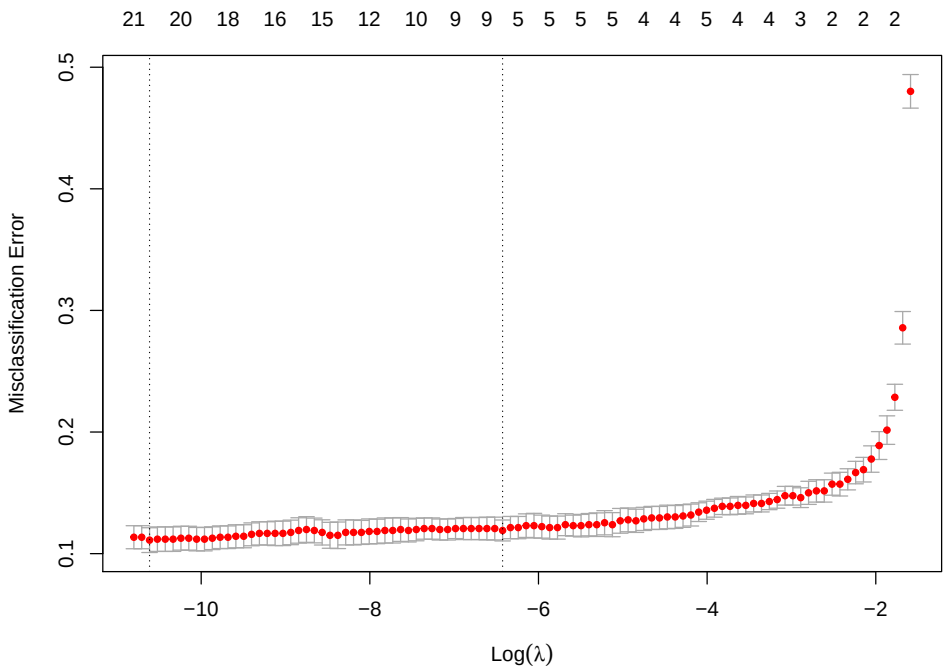
4. Utiliser la méthode `coef` pour comparer les coefficients obtenus avec une grande valeur de λ ($\lambda = 0.2$) et une petite valeur de λ ($\lambda = 0.002$). Vérifier que plus la valeur de λ est grande, plus le nombre de variables sélectionnées est petit.

5. On veut maintenant fixer la valeur du paramètre de régularisation λ par validation croisée. Pour cela on utilise la fonction `glmnet.cv`. Que fait le code ci-dessous ? Quel est par défaut le type de validation croisée implémenté ?

```
g <- cv.glmnet(as.matrix(X), as.factor(Y), family="binomial",
               alpha=1,
               standardize=FALSE,
               type.measure="class")
```

6. Expliquer les 3 axes du graphique ci-dessous. A quoi correspondent les points rouges, les intervalles, les lignes pointillées verticales ?

```
plot(g)
```



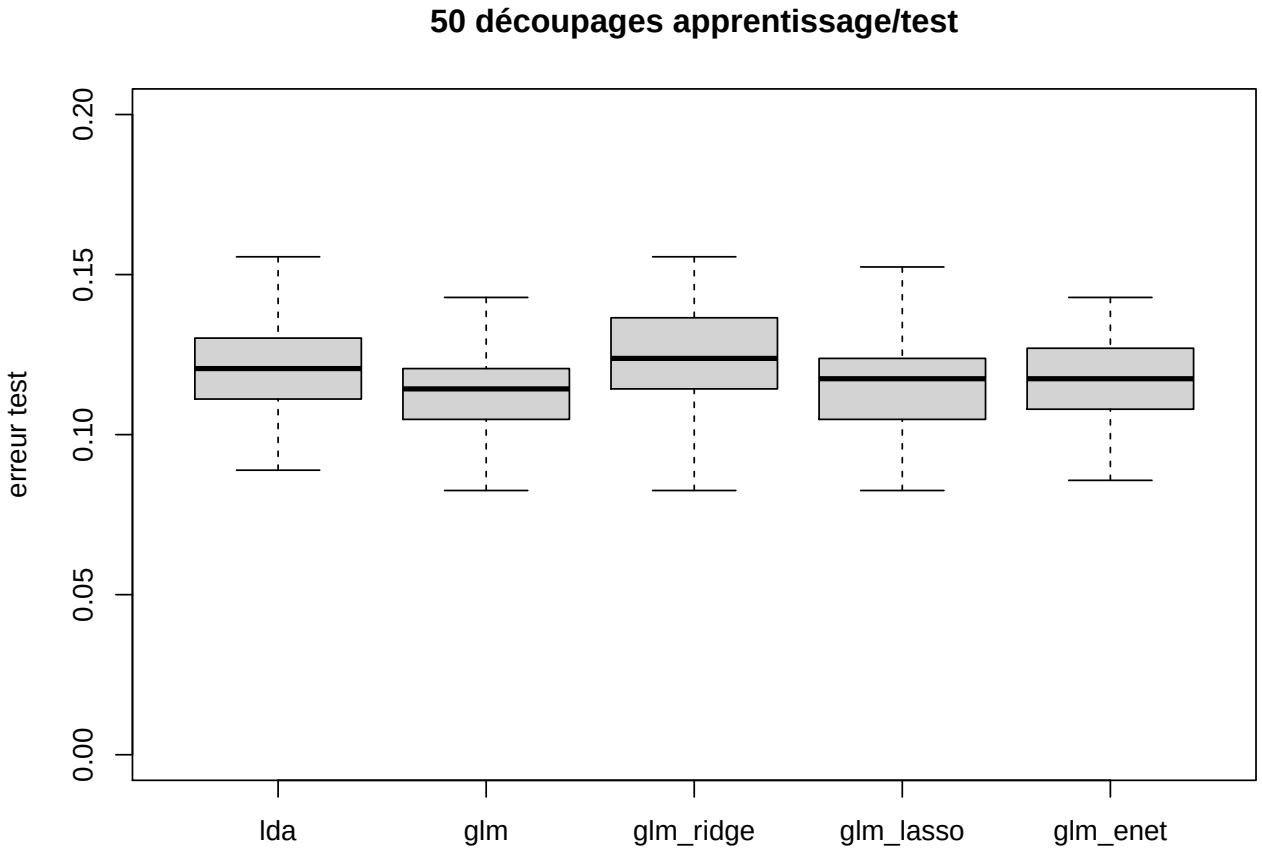
7. Quelles sont les valeurs de `lambda.min` et `lambda.1se` ? Vérifier que ces valeurs correspondent bien aux deux lignes verticales du graphique.
8. Le modèle obtenu avec `lambda.1se` est-il beaucoup plus parcimonieux que le modèle obtenu avec `lambda.min` ? Est-il beaucoup moins bon ?
9. On choisit finalement `lambda.1se` comme paramètre de régularisation. Quelles sont les variables explicatives sélectionnées ?
10. Utiliser la méthode `predict` pour prédire la classe de la première exploitation agricole et estimer sa probabilité à posteriori d'être défaillante.

Exercice 6. On continue avec les données sur les exploitations agricoles.

```
load("../data/Desbois_complet.rda")
X <- data[,-1]
Y <- data$DIFF
```

On veut maintenant comparer différentes méthodes en estimant l'erreur de classification sur B découpages aléatoires des données en 945 observations d'apprentissage et 315 observations test. Les méthodes comparées sont :

— l'analyse discriminante linéaire,
— la régression logistique,
— la régression logistique ridge avec λ fixé par validation croisée 10-folds,
— la régression logistique lasso avec λ fixé par validation croisée 10-folds,
— la régression logistique elasticnet avec $\alpha = 0.9$ et λ fixé par validation croisée 10-folds.



Conclure.